Sobre uma conjectura de Erdős acerca de grafos livres de triângulos

Introdução e motivação

Um grafo G é um par (V, E), em que V são os *vértices* e E são as *arestas*, que são pares não ordenados de vértices. A Teoria Extremal dos Grafos é uma área que estuda propriedades dos grafos sob certas restrições e compreender propriedades extremais tem aplicações em análise de algoritmos, modelagem de redes, otimização e diversas outras áreas.

- Grafos livres de triângulos não contêm ciclos de tamanho 3.
- Pergunta natural: quantas arestas um grafo livre de triângulos pode ter?
- **Teorema de Mantel.** Um grafo com n vértices sem triângulos possui no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas.

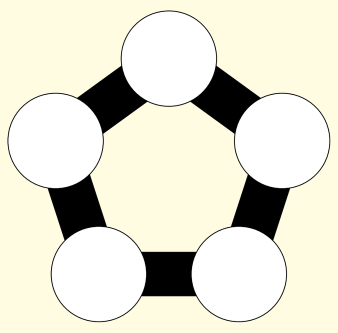
Problema e objetivos

Os únicos grafos que satisfazem igualdade no Teorema de Mantel são bipartidos.

- Pergunta natural: quão "distante" pode estar um grafo sem triângulos de um bipartido?
- Escrevemos $D(G)$ para descrever essa distância, que é o tamanho do menor conjunto de arestas cuja remoção torna G bipartido.

Estamos interessados na seguinte conjectura, que permanece em aberto:

Conjectura 1 (Erdős, 1975). Todo grafo livre de triângulos G com n vértices satisfaz $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.



O blow-up balanceado de C_5. Temos $e(G) = \frac{n^2}{5}$ e $D(G) = \frac{n^2}{25}$.

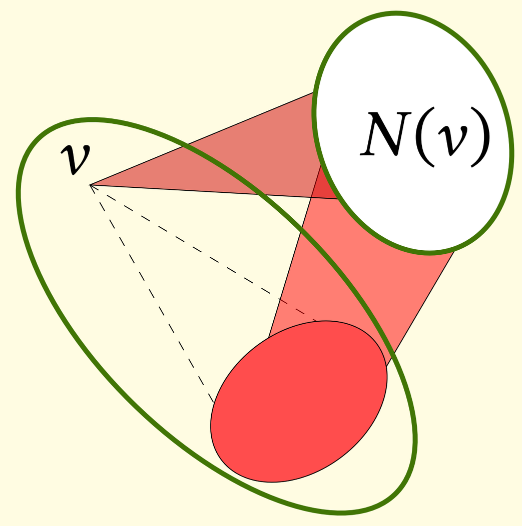
Metodologia

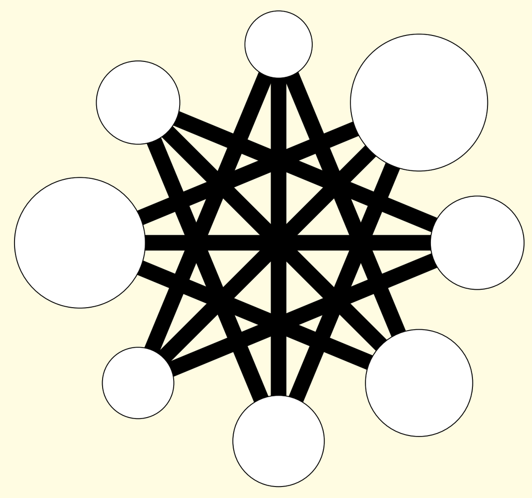
- **Álgebras de flag** (ver [2])
  → traduzem problemas de densidade em programas semidefinidos.
- Blow-ups
  → expandem vértices para conjuntos independentes mantendo estrutura.
- **Condições de grau mínimo** (ver [3])
  → permitem simplificar o problema para blow-ups de grafos pequenos.

Resultados principais

Por resultados clássicos de estabilidade de Simonovits, é possível verificar a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.21n^2$. Em [1] é provado que $D(G) \leq \frac{4e(G)^2}{n^2}$ e $D(G) \leq \frac{n^2}{18+\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$. Em particular, a Conjectura 1 vale se $e(G) \geq 0.20n^2$.

- [2] → Generaliza [1]: prova a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.1599n^2$ e outros resultados parciais usando *álgebras de flag*.
- Usando [3], provamos a Conjectura 1 quando $\delta(G) > \frac{4n}{11}$.





Observe que $D(G) \leq e(G - N(v))$, pois $N(v)$ é independente. Na linguagem de álgebras de flag, essa figura representa o corte local relacionado à restrição $[\![\cdot]\!] \geq \frac{2}{25}$.

Se $\delta(G) > \frac{4n}{11}$, então G é da forma acima, e é possível demonstrar a Conjectura 1 usando essa informação estrutural extra.

Discussão

- As cotas conhecidas funcionam melhor para grafos densos: resultados do tipo "a Conjectura 1 vale se $e(G) \geq \alpha n^2$";
- Uso de álgebras de flag fornece desigualdades assintóticas a partir de otimização (numérico);
- Condições de grau mínimo simplificam os grafos, mesmo abaixo do limiar $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$ para provar a Conjectura 1(estrutural).

Conclusão

O uso de álgebras de flag e condições de grau mínimo confirmam a Conjectura 1 em subclasses de grafos densos. O trabalho contribui revisando os métodos usados no problema e com uma prova alternativa para o caso $\delta(G) > \frac{4n}{11}$.

Referências

[1] Erdős, Faudree et. al. *How to Make a Graph Bipartite. (1988)*
[2] Balogh et. al. *Max cuts in triangle-free graphs. (2021)*
[3] Chen et. al. *Triangle-free graphs with large degree. (1997)*

Aluno: Marcelo Machado Lage
Orientador: Guilherme Oliveira Mota
Departmento de Ciência da Computação — Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
Universidade de São Paulo

Durante a realização desse projeto, o aluno recebeu apoio da FAPESP. Processos nº 2025/06707-6, 2025/14743-2.